



ce
pre
UNI

**CICLO
PRE 2024-I**

Trigonometría

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS (PARTE II)



FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS II

Recordemos el cuadro donde tenemos el Dominio restringido y el Rango que consideraremos para obtener las funciones trigonométricas inversas:

Función	Dominio Restringido	Rango
$y = \text{sen}(x)$	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	$[-1; 1]$
$y = \text{cos}(x)$	$[0; \pi]$	$[-1; 1]$
$y = \text{tan}(x)$	$\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$	$\mathbb{R}$
$y = \text{cot}(x)$	$\langle 0; \pi \rangle$	$\mathbb{R}$
$y = \text{sec}(x)$	$[0; \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$	$\mathbb{R} - \langle -1; 1 \rangle$
$y = \text{csc}(x)$	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$	$\mathbb{R} - \langle -1; 1 \rangle$

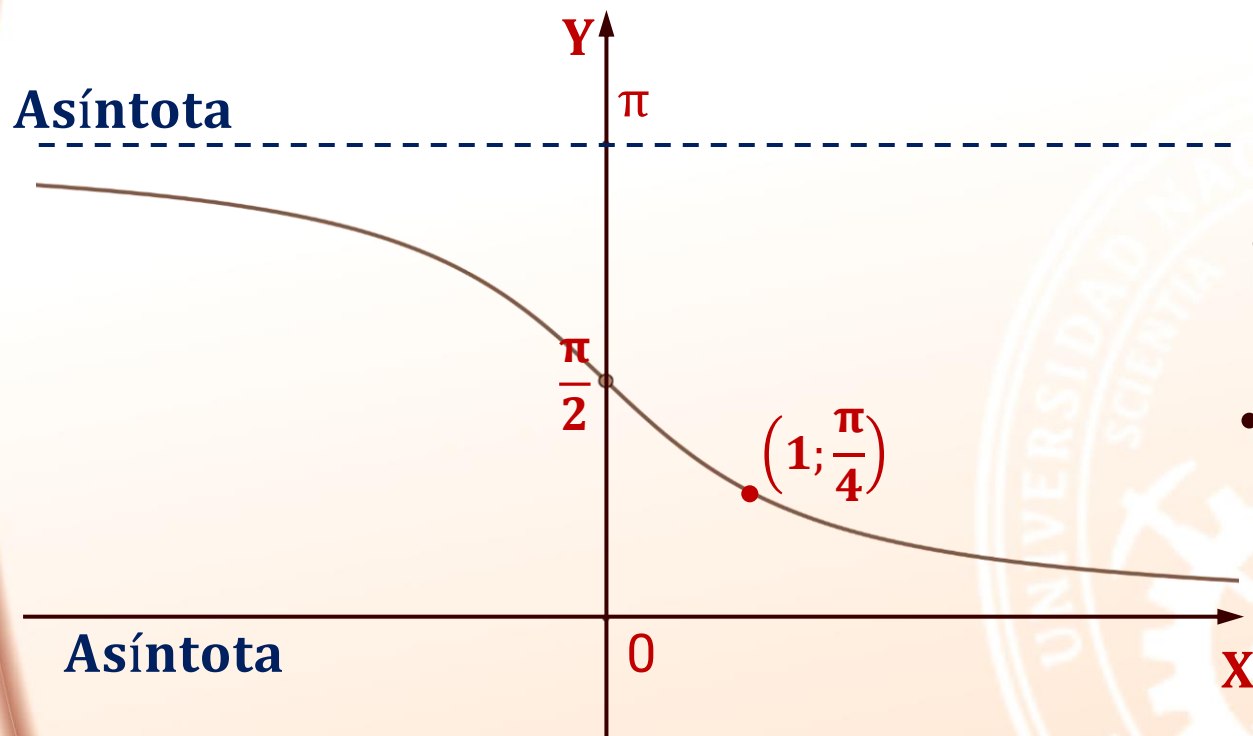
4. Función Arco cotangente

$$f.t(\text{arco cotangente}) = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : y = \operatorname{arccot}(x) \leftrightarrow \cot(y) = x, x \in \mathbb{R} \text{ e } y \in \langle 0; \pi \rangle\}$$

Notación: $\operatorname{arccot}(x)$, $\cot^{-1}(x)$.

Consideraciones:

- $\operatorname{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- $\operatorname{Ran}(f) = \langle 0; \pi \rangle$
- $\forall x \in \langle -\infty; +\infty \rangle$:
 $\operatorname{arccot}(-x) = \pi - \operatorname{arccot}(x)$
- Es una función **decreciente**:
Si $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$: $x_1 < x_2$
 $\Rightarrow \operatorname{arccot}(x_2) < \operatorname{arccot}(x_1)$



$$\theta = \operatorname{arccot}(\Delta)$$

$$\begin{cases} -\infty < \Delta < +\infty \\ 0 < \theta < \pi \end{cases}$$

PROBLEMA 01

Determine el dominio de la función f ,
definida por:

$$f(x) = \frac{\sqrt{4 \operatorname{arccot}(x) - \pi/3} + \pi/12}{\sqrt[4]{2\pi - 3 \operatorname{arccot}(x)}}$$

A) $\left[-\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

B) $\left[\sqrt{3}; \frac{4\sqrt{3}}{3}\right]$

C) $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}; 2 - \sqrt{3}\right]$

D) $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}; 2 + \sqrt{3}\right]$

E) $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}; 2 + \sqrt{3}\right]$

CLAVE: E

PROBLEMA 02

Determine el dominio de la función con regla de correspondencia:

$$f(x) = \sqrt{\operatorname{arccot}(|x|) - \arctan(|x|)}$$

A) $[-1; 1]$

B) $[-1; 0]$

C) $[0; 1]$

D) $[1; +\infty)$

E) $[-1; +\infty)$

CLAVE: A

PROBLEMA 03

Si el rango de la función f , definida por:

$$f(x) = \operatorname{arccot} \left(\frac{3 \operatorname{sen}^2(x) + 2 \cos^2(x)}{2 \operatorname{sen}^2(x) + 3 \cos^2(x)} \right)$$

es $[\alpha; \beta]$. Calcule $13 \operatorname{sen}^2(\alpha) + \sec^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$.

A) 3

B) 4

C) 5

D) 6

E) 7

CLAVE: D

PROBLEMA 04

Sea la función f , definida por $f(x) = \frac{2 \operatorname{arc} \cot(\sqrt{x^2 - 1}) + \pi}{3 \operatorname{arc} \cos(x) + \pi}$

Al determinar el rango de f , se obtiene $\{a, b\}$, $a < b$. Calcule $4a + 3b$.

A) 4

B) 5

C) 6

D) 7

E) 8

CLAVE: E

PROBLEMA 05

Determine el rango de la función f , definida por:

$$f(x) = \operatorname{arccot}\left(\frac{2x}{x^2 + 3}\right)$$

A) $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$

B) $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$

C) $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right]$

D) $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$

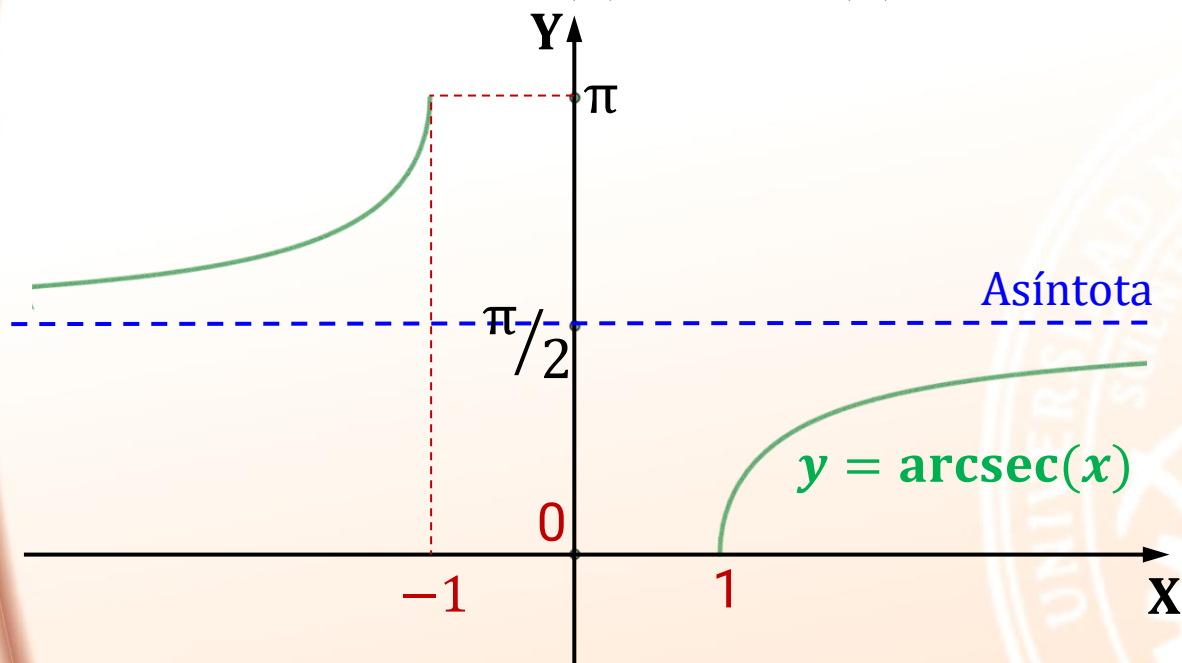
E) $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$

CLAVE: D

5. Función Arco secante

$$f.t(\text{arcsecante}) = \left\{ (x; y) \in \mathbb{R}^2 : y = \text{arcsec}(x) \leftrightarrow \sec(y) = x; \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} - \langle -1; 1 \rangle \\ y \in [0; \pi] - \left\{ \frac{\pi}{2} \right\} \end{array} \right\}$$

Notación: $\text{arcsec}(x)$, $\sec^{-1}(x)$.



Consideraciones:

- $\text{Dom}(f) = \langle -\infty; -1 \rangle \cup [1; +\infty)$
- $\text{Ran}(f) = \left[0; \frac{\pi}{2} \right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi \right]$
- $\forall x \in \langle -\infty; -1 \rangle \cup [1; +\infty)$:
 $\text{arcsec}(-x) = \pi - \text{arcsec}(x)$
- **Es creciente:**
Si $x_1, x_2 \in \langle -\infty; -1 \rangle / x_1 < x_2$
 $\rightarrow \text{arcsec}(x_1) < \text{arcsec}(x_2)$
Si $x_1, x_2 \in [1; +\infty) / x_1 < x_2$
 $\rightarrow \text{arcsec}(x_1) < \text{arcsec}(x_2)$

$$\theta = \text{arcsec}(\Delta) \begin{cases} -\infty < \Delta \leq -1 \vee 1 \leq \Delta < +\infty \\ 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \vee \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi \end{cases}$$

PROBLEMA 06

Determine el dominio de la función f , definida por:

$$f(x) = \frac{\arcsen(|x| - 1) - 2}{\operatorname{arcsec}\left(\frac{x-1}{2}\right) + \pi}$$

A) $[-4; -2] \cup [3; 4]$

B) $[-4; -3] \cup [3; 4]$

C) $[-4; -3] \cup [2; 4]$

D) $[-3; -2] \cup [2; 4]$

E) $[-4; -1] \cup [2; 4]$

CLAVE: A

PROBLEMA 07

Sea la función f , definida por $f(x) = 5\operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{3} - 2\right) - \frac{9\pi}{4}$, determine $\operatorname{Dom}(f) \cap \operatorname{Ran}(f)$.

A) $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{6}\right]$

B) $\left[-\frac{9\pi}{4}; 3\right] - \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$

C) $\left[-\frac{\pi}{3}; 1\right] - \{0\}$

D) $\left[-1; \frac{\pi}{6}\right] - \{0\}$

E) $[0; 3] - \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$

CLAVE: B

PROBLEMA 08

Calcule la suma de los elementos enteros del dominio de la función f , definida por:

$$f(x) = \frac{\operatorname{arccot}(\sqrt{64 - x^2})}{\operatorname{arcsec}\left(\frac{x-1}{7}\right) - \pi}$$

A) -3 B) -5 C) -7 D) 3 E) 5 **CLAVE: C**

PROBLEMA 09

Determine el rango de la función f , definida por:

$$f(x) = \frac{5}{\pi} \operatorname{arcsec} \left(\sqrt{\tan^4(x) + \cot^4(x) + 2} \right) - 3$$

A) $[-4/3; 2]$ B) $[-1; 1]$

C) $[-4/3; -1/2)$

D) $[0; 1]$ E) $[0; -1/2]$

CLAVE: C

PROBLEMA 10

Dada la función f , definida por

$$f(x) = \arcsin \left(\sqrt{1 - 2 \cos(x)} + \sqrt{1 + 2 \cos(x)} \right)$$

determine el rango de la función f .

A) $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4} \right]$

B) $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3} \right]$

C) $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3} \right]$

D) $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3} \right]$

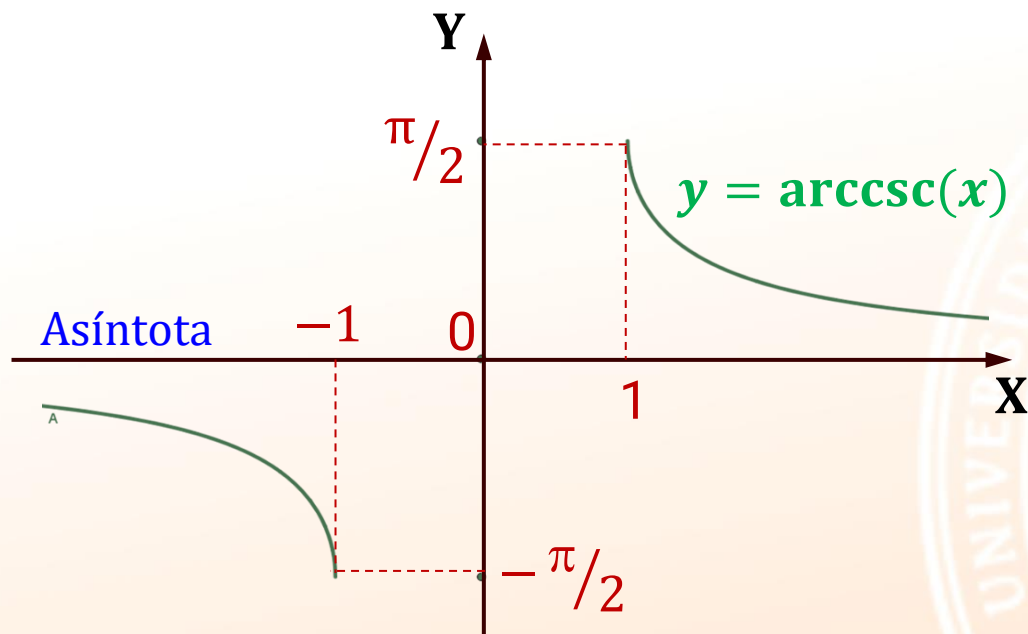
E) $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right]$

CLAVE: D

6. Función Arco cosecante

$$f. t(\text{arco cosec}) = \left\{ (x; y) \in \mathbb{R}^2 : y = \text{arccsc}(x) \leftrightarrow \text{csc}(y) = x; \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} - \langle -1; 1 \rangle \\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] - \{0\} \end{array} \right\}$$

Notación: $\text{arccsc}(x)$, $\text{csc}^{-1}(x)$.



$$\theta = \text{arccsc}(\Delta) \begin{cases} -\infty < \Delta \leq -1 \vee 1 \leq \Delta < +\infty \\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta < 0 \vee 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Consideraciones:

- $\text{Dom}(f) = \langle -\infty; -1 \rangle \cup [1; +\infty)$
- $\text{Ran}(f) = \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$
- Es una función impar.
 $\text{arccsc}(-x) = -\text{arccsc}(x)$
- Es decreciente:
Si $x_1, x_2 \in \langle -\infty; -1 \rangle / x_1 < x_2 \rightarrow \text{arccsc}(x_2) < \text{arccsc}(x_1)$
Si $x_1, x_2 \in [1; +\infty) / x_1 < x_2 \rightarrow \text{arccsc}(x_2) < \text{arccsc}(x_1)$

PROBLEMA 11

Determine el dominio de la función f , definida por:

$$f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{4} - \arccsc(2x)} + \sqrt{\arccsc(2x) - \frac{\pi}{6}}$$

A) $[1; 2]$

B) $[1; \sqrt{2}]$

C) $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$

D) $[0; 1]$

E) $[\sqrt{2}; 4]$
CLAVE: C

PROBLEMA 12

Al determinar el dominio de la función f , definida por:

$$f(x) = \frac{\frac{2}{\pi} \arccsc\left(\frac{2x-1}{5}\right) + 5}{\arctan(\sqrt{6-5x-x^2})}$$

se obtiene el intervalo $\langle a; b \rangle$. Calcule el valor de $5b - 2a$.

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

CLAVE: B

PROBLEMA 13

Dada la función f , definida por

$$f(x) = \operatorname{arccsc}[\operatorname{sen}^6(x) + \operatorname{cos}^6(x)]; \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

Determine el dominio de la función f .

- A) $\left\{(4k + 1)\frac{\pi}{4}\right\}$ B) $\left\{(2k + 1)\frac{\pi}{4}\right\}$ C) $\{k\pi\}$ D) $\left\{\frac{k\pi}{2}\right\}$ E) $\left\{((4k - 1))\frac{\pi}{4}\right\}$

CLAVE: D

PROBLEMA 14

Determine el rango de la función f , definida por:

$$f(x) = \operatorname{arccsc} \left(\sqrt{\csc^2(x) + 2|\operatorname{sen}(x)| + 1} \right)$$

A) $\left[0; \frac{\pi}{6}\right)$

B) $\left[0; \frac{\pi}{4}\right)$

C) $\left\langle 0; \frac{\pi}{3}\right\rangle$

D) $\left\langle 0; \frac{\pi}{6}\right]$

E) $\left\langle 0; \frac{\pi}{3}\right]$

CLAVE: D

PROBLEMA 15 (2do EXÁMEN PARCIAL CEPRE UNI 2008 - I)

Determine el rango de la función f , definida por: $f(x) = \frac{1 - |\operatorname{arccsc}(x)|}{1 + |\operatorname{arccsc}(x)|}$

D) $\left[\frac{1 - \pi}{1 + \pi}; 1 \right)$

E) $\left[\frac{2 - \pi}{2 + \pi}; 1 \right)$

C) $\left[\frac{4 - \pi}{4 + \pi}; 1 \right)$

A) $\left[\frac{1 - \pi}{1 + \pi}; 1 \right]$

B) $\left[\frac{2 - \pi}{2 + \pi}; 1 \right]$

CLAVE: B